ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen final **09/10/2024**

Apellido y nombre:

Corrigió: **Revisó:**

T1	T2	P1	P2	P3	P4	Calificación

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta. No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas

Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1. *a*) Defina **punto regular** de una curva en $\mathbb{R}^3$.

b) Determine si $P_0 = (4, -4, 3)$ es un punto regular de la curva imagen de la función $\vec{f}(t) = (t^3 + 3t^2,\ t^2 + 4t,\ 3)$.

T2. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas; **justifique claramente su respuesta.**

a) Si $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}\ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 2\ , & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

entonces **no existe el límite** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) Si V es el cuerpo **en el primer octante** definido por $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$, $x^2 + y^2 \leq 4$ y $z \leq 4$, entonces la integral $\iiint_V x\, dxdydz$ puede calcularse, en coordenadas cilíndricas, mediante la integral

$$\int_0^{\pi/2} \left[\int_0^2 \left[\int_0^r r^2 \cos(\theta)\, dz \right] dr \right] d\theta$$

P1. Sea Π el plano tangente a la superficie definida por $x^2 + y^3 + z^3 - z = 2$ en el punto $(1, 1, 0)$. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = (y,\ 0,\ 0)$ a través de la porción de Π que verifica $4x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$, orientada con vectores nomales con tercera componente positiva.

P2. Calcule el flujo de $\vec{f}(x,y,z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ a través de la superficie frontera del conjunto definido por $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 0$, orientada con el campo normal exterior.

P3. Halle las direcciones de derivada direccional nula en el punto $\mathbf{x}_0 = (4, 2)$ de la función $g(x,y) = xf(x,y)$, donde $z = f(x,y)$ es la función definida implícitamente por $xy + ze^{z-1} = 9$ en un entorno del punto $(4, 2, 1)$.

P4. Halle la solución de la ecuación $y'' - y' - 2y = -2x - 1$ cuya recta tangente en $(0, y_0)$ es $y = 7x + 3$.

HOJA N° 1/3

FECHA 9/10/24

AM2 UTN | Final

T1 a) Define punto regular de una curva en $\mathbb{R}^3$

"A" es punto regular de C (una curva en $\mathbb{R}^3$) si el vector tangente a la curva en ese punto es $\neq (0,0,0)$

b) Determinar si $P_0 = (4,-4,3)$ es un punto regular de la curva imagen de la función

$$\bar{f}_{(t)} = (t^3+3t^2, t^2+4t, 3)$$

$$P_0 = \bar{f}_{(t_0)} = (4,-4,3) = (\underbrace{t_0^3+3t_0^2}_{4}, \underbrace{t_0^2+4t_0}_{-4}, \underbrace{3}_{3}) \checkmark$$

$$\begin{cases} t_0^3+3t_0^2 = 4 \\ t_0^2+4t_0 = -4 \end{cases} \rightarrow t_0^3+3t_0^2 = -t_0^2-4t_0$$

$$t_0^3+4t_0^2+4t_0 = 0$$

$$t_0(t_0^2+4t_0+4) = 0$$

$$t_0 = 0 \vee t_0 = -2 \text{ (raíz doble)}$$

$$t_0 = -2 \Leftarrow \underset{t_0 \neq 0}{\text{No cumple}}$$

$$\boxed{P_0 = \bar{f}_{(-2)} = (4,-4,3)} \checkmark$$

$$\bar{f}'_{(t)} = (3t^2+6t, 2t+4, 0)$$

$$\hookrightarrow \bar{f}'_{(-2)} = (0,0,0) \rightarrow \text{No es regular}$$

$$\boxed{P_0 \text{ NO es punto regular de C}}$$

NOTA

T2 V o F:

a) Si $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ entonces no existe el lim. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{x^2}_{\text{acot}}\,\underbrace{\frac{y^3}{x^2+y^2}}_{\text{infinit}}\ \text{(posición aproximada)} = 0$$ (acotado por infinitesimal)

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{x^2+y^2} \text{ acotado entre 0 y 1}$$

F

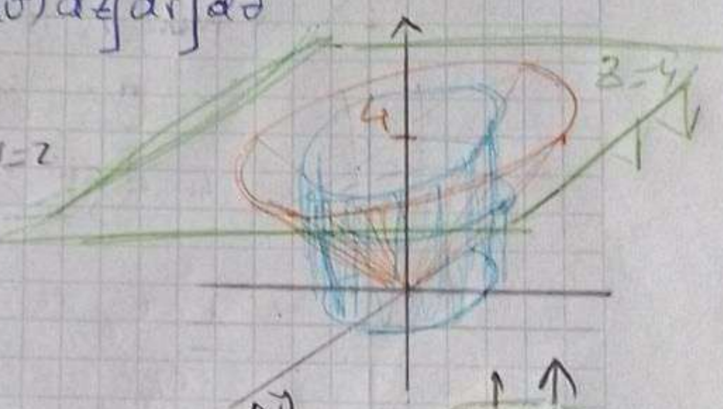
$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$$

b) Si V es el cuerpo en el primer octante definido por $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$, $x^2+y^2 \leq 4$ y $z \leq 4$ entonces la integral $\iiint x\,dx\,dy\,dz$ puede calcularse en coord cilíndricas mediante la integral:

$$\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^2\left[\int_0^r r^2\cos(\theta)\,dz\right]dr\right]d\theta$$

$\begin{cases} \boxed{\sqrt{x^2+y^2} \leq z} \to \text{semicono positivo} \\ x^2+y^2 \leq 4 \to \text{interior de un cilindro } r=2 \\ \boxed{z \leq 4} \end{cases}$

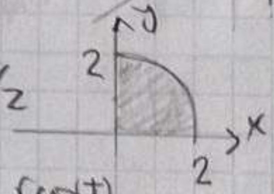
Primer octante



$\boxed{0 \leq z \leq r}$

$0 \leq t \leq \pi/2$

$0 \leq r \leq 2$



$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$

Siempre el piso es el cono y el techo z=4

$\neq$

$\boxed{\text{cono} \leq z \leq 4}$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2}$

$\boxed{r \leq z \leq 4}$

F

AM2 UTN | Final | HOJA N° 2/3 FECHA 9-10-24

$\boxed{P1}$ Sea π el plano tangente a la sup. definida por $\underbrace{x^2+y^3+z^3-z=2}_{S}$ en el punto $(1,1,0)$.
Calcular el flujo del campo $\bar{f}(x,y,z)=(y,0,0)$ a través de la porción de π que verifica $4x^2+y^2\le 4$, $y\ge 0$ orientada con vectores normales con tercera componente positiva

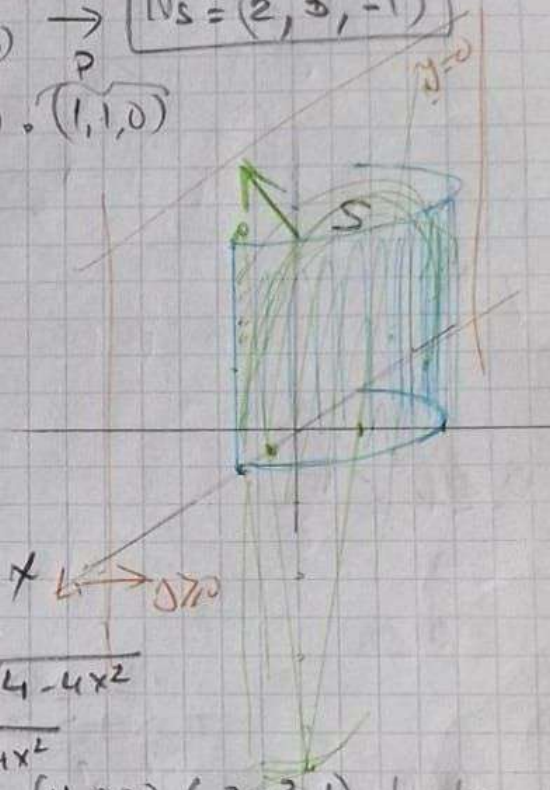
$\boxed{N=(-2,-3,1)}$

Hallo la ecuación de π en $(1,1,0)$

$$N_{S\,(1,1,0)}=(2x,\,3y^2,\,3z^2-1)\Big|_{(1,1,0)} \rightarrow \boxed{N_S=(2,3,-1)}$$

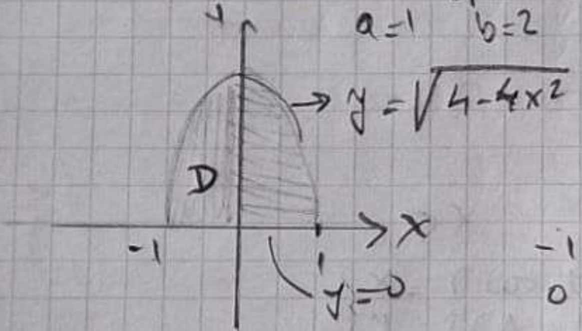
$$\pi:\ (x,y,z)\cdot\overbrace{(2,3,-1)}^{N}=\overbrace{(2,3,-1)}^{N}\cdot\overbrace{(1,1,0)}^{P}$$

$$\boxed{\pi:\ 2x+3y-z=5}$$



$$\begin{cases}2x+3y-z=5\\ y\ge 0\\ 4x^2+y^2\le 4\end{cases} \rightarrow \boxed{\text{elipse } x^2+\frac{y^2}{4}\le 1}$$

$a=1 \quad b=2$



$-1\le x\le 1$
$0\le y\le\sqrt{4-4x^2}$

$$\iint_S \bar{F}\,d\bar{\sigma}=\iint_D \bar{F}\cdot N\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{4-4x^2}}\underbrace{(y,0,0)\,(-2,-3,1)}_{-2y}\,dy\,dx=$$

$$=-\int_{-1}^{1} y^2\Big|_0^{\sqrt{4-4x^2}}dx=-\int_{-1}^{1}4-4x^2\,dx=-\frac{16}{3}$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\,d\bar{\sigma}=\frac{-16}{3}}$$

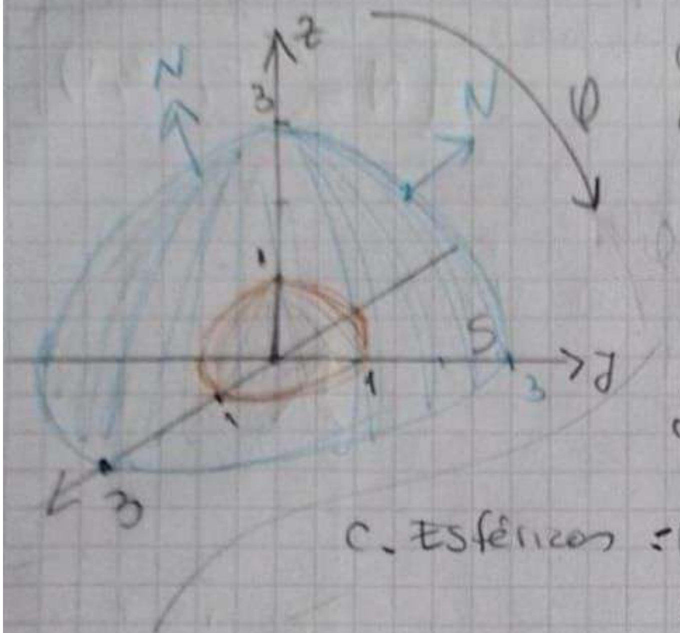
NOTA

(P2) Calcular el flujo de $\bar{F}(x,y,z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ a través de la sup. frontera del conj. definido por:

$$1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9 \ , \ z \geq 0$$

orientada con el campo normal exterior.

Sup FRONTERA $\Rightarrow$ GAUSS (sin restar tapas)



$\overbrace{\left\{\begin{array}{l}\text{Sup. frontera de una región } \mathbb{R}^3 \checkmark \\ \bar{F} \in C^1\end{array}\right.}^{W}$

Se cumplen las hip. T. Gauss $\therefore$

$$\oiint_S \bar{F} d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F}) \, d\mathrm{vol}$$

$$\operatorname{div}(\bar{F}) = y^2 + z^2 + x^2 = \rho^2$$

C. Esféricas: $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$1 \leq \rho \leq 3$

$$\text{Jac.} = \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$\oiint_S \bar{F} d\bar{s} = \iiint_W \rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_1^3 \rho^4 \operatorname{sen}(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\rho^5}{5} \Big|_1^3 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{242}{5} \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\varphi) \, d\varphi}_{1} \, d\theta =$$

$$= \frac{242}{5} \cdot 2\pi = \boxed{\frac{484}{5}\pi = \oiint_S \bar{F} d\bar{s}}$$

(P3) Hallar las direcciones de derivada direccional nula en el punto $X_0 = (4,2)$ de la función $g(x,y) = x\,f(x,y)$ donde $z = f(x,y)$ es la función definida implícitamente por

$$\underbrace{xy + z e^{z-1} = 9}_{S}$$ en un entorno del punto $(4,2,1)$

$z = f(x,y) \rightarrow f \in C^1$, $g(x,y) = x \cdot f(x,y) \rightarrow g \in C^1$ por ser composición de funciones C^1

g es diferenciable

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \check{v}}(4,2) = \nabla g(4,2) \cdot \check{v}}$$

Sea $F(x,y,z) = xy + ze^{z-1} - 9$

S es la sup. de nivel 0 de F

x TFI: $f'_x(4,2) = -\dfrac{F'_x(4,2,f(4,2))}{F'_z(4,2,f(4,2))}$ y $f'_y(4,2) = -\dfrac{F'_y(4,2,f(4,2))}{F'_z(4,2,f(4,2))}$

Hallo $f(4,2)$

$xy + ze^{z-1} = 9 \rightarrow 4 \times 2 + ze^{z-1} = 9 \rightarrow z = 1$ cumple $\rightarrow f(4,2) = 1$

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= y &\longrightarrow F'_x(4,2,1) &= 2 \\ F'_y &= x &\longrightarrow F'_y(4,2,1) &= 4 \\ F'_z &= e^{z-1} + ze^{z-1} &\longrightarrow F'_z(4,2,1) &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} f'_x &= -\frac{2}{2} = -1 \\ f'_y &= -\frac{4}{2} = -2 \end{aligned}\right\} \nabla f(4,2) = (-1,-2)$$

Hallo $\nabla g(4,2)$:

$$\nabla g(4,2) = \Big(\underbrace{f(4,2)}_{1} + \overset{4}{x}\, f'_x(4,2)\,,\ \overset{4}{x}\, f'_y(4,2)\Big) = \big(1 + 4(-1), 4(-2)\big)$$

$$\boxed{\nabla g(4,2) = (-3,-8)}$$

Hallo $\check{v}$ / $\nabla g(4,2) \cdot \check{v} = 0$

$(-3,-8)(a,b) = 0 = -3a - 8b \rightarrow 3a = -8b \rightarrow a = -\frac{8}{3}b$

$\vec{v}_1 = (a,b) = \left(-\frac{8}{3}, 1\right)$

$\vec{v}_2 = (a,b) = \left(\frac{8}{3}, -1\right)$

vectores $\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (-8,3) \\ \vec{v}_2 &= (8,-3)\end{aligned}}$ $\|\vec{v}_{1,2}\| = \sqrt{73}$

versores

$$\boxed{\begin{aligned}\check{v}_1 &= \left(-\frac{8}{\sqrt{73}}, \frac{3}{\sqrt{73}}\right) \\ \check{v}_2 &= \left(\frac{8}{\sqrt{73}}, \frac{-3}{\sqrt{73}}\right)\end{aligned}}$$

P4) Hallar la solución de la ecuación $y''-y'-2y=-2x-1$ cuya recta tangente en $(0, y_0)$ es $y=7x+3$

$y(0)=7\times 0+3 \rightarrow y(0)=3$
$y'=7 \longrightarrow y'(0)=7$
} condiciones iniciales

$y''-y'-2y=2x-1$

SH $\rightarrow y''-y'-2y=0$

$r^2-r-2=0 \rightarrow \boxed{r_1=-1, \ r_2=2}$

$\hookrightarrow \boxed{y_H=Ae^{-x}+Be^{2x}}$ $A,B\in\mathbb{R}$

SP propongo $y_P=Cx+D \rightarrow y_P'=C \rightarrow y''_P=0$

$y''-y'-2y=-2x-1$

$0-C-2(Cx+D)=-2x-1$

$-C-2Cx-2D=-2x-1$

$x\underbrace{(-2C)}_{-2}+\underbrace{(-C-2D)}_{-1}=-2x-1$

$C=1 \rightarrow -1-2D=-1 \rightarrow D=0$ $\boxed{y_P=x}$

$y_G=y_H+y_P=Ae^{-x}+Be^{2x}+x$

$y_G'=-Ae^{-x}+2Be^{2x}+1$

$y(0)=Ae^{-0}+Be^{2\times 0}+0=3=A+B$

$y'(0)=-Ae^{-0}+2Be^{2\times 0}+1=7=-A+2B+1$

$\rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ -A+2B=6 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A=0 \\ B=3 \end{matrix}$

$$\boxed{y_P=3e^{2x}+x}$$

NOTA